



第3章 复数

第1节 复数的概念及运算



题型上分练

1. C 【解析】因为复数 $z = a - 1 + (2a - 4)i$ ($a \in \mathbf{R}$) 为纯虚数, 所

$$\text{以} \begin{cases} a - 1 = 0, \\ 2a - 4 \neq 0, \end{cases} \text{ 所以 } a = 1. \text{ 故选 C.}$$

2. B 【解析】 $\because z = 2 + (m - 9)i, \therefore \bar{z} = 2 + (9 - m)i. \because \bar{z}$ 与复数 $2 + 5i$ 相等, $\therefore 9 - m = 5$, 解得 $m = 4$. 故选 B.

3. B 【解析】设 $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$), 则 $\bar{z} = a - bi$. 因为 $z + 2\bar{z} = a + bi + 2(a - bi) = 3a - bi = 6 + i$, 所以 $\begin{cases} 3a = 6, \\ -b = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 2, \\ b = -1, \end{cases}$ 则 $z = 2 - i$. 故选 B.

4. C 【解析】由 $z(2 - i) = 1 + mi$, 可得 $z = \frac{1 + mi}{2 - i} = \frac{(1 + mi)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 - m + (2m + 1)i}{5} = \frac{2 - m}{5} + \frac{2m + 1}{5}i$. 依题意, 可得 $\frac{2 - m}{5} = \frac{2m + 1}{5}$, 解得 $m = \frac{1}{3}$. 故选 C.

5. D 【解析】因为 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 所以 $\bar{z} = x - yi$. 由 $(2 + i)(1 - i) = \bar{z} + x$, 得 $(2 + i)(1 - i) = 2x - yi$, 即 $3 - i = 2x - yi$, 所以 $\begin{cases} 2x = 3, \\ y = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以 $x + y = \frac{5}{2}$. 故选 D.

6. D 【解析】因为 $(1 + i)z = -i$, 所以 $z = \frac{-i}{1 + i} = \frac{-i(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$. 故选 D.

7. A 【解析】因为 $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 所以 $z^2 + z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = -1$. 故选 A.

8. AC 【解析】因为 $z_1 = 2 + i, z_2 = 1 - 2i$, 所以 $|z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, |z_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$, 所以 $|z_1| = |z_2|$, 故 A 正确;
 $z_1 - z_2 = 2 + i - (1 - 2i) = 1 + 3i$, 故 B 错误;
因为 $z_1 + z_2 = 2 + i + 1 - 2i = 3 - i$, 所以 $|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$, 故 C 正确;
因为 $\bar{z}_1 = 2 - i, \bar{z}_2 = 1 + 2i$, 所以 $z_1 \bar{z}_2 = (2 + i)(1 + 2i) = 2 + 5i + 2i^2 = 5i, \bar{z}_1 z_2 = (2 - i)(1 - 2i) = 2 - 5i + 2i^2 = -5i$, 所以 $z_1 \bar{z}_2 \neq \bar{z}_1 z_2$, 故 D 错误. 故选 AC.

9. B 【解析】 $\frac{i^{2025} + 1}{i^{2025} - 1} = \frac{i^{2024} \cdot i + 1}{i^{2024} \cdot i - 1} = \frac{1 + i}{i - 1} = \frac{(1 + i)(-1 - i)}{(i - 1)(-1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$



-i. 故选 B.

10. B 【解析】因为 $z = \frac{i(1+i)}{1-i} = \frac{i(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{i \cdot 2i}{2} = -1$, 则 $\bar{z} = -1$, 所以 $z + \bar{z} = -2$, $z - \bar{z} = 0$, $z \cdot \bar{z} = 1$, $\frac{\bar{z}}{z} = 1$, 故 **B** 正确, **ACD** 均错误. 故选 B.

11. D 【解析】因为 $2+i$ 是关于 x 的方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的一个根, 所以 $(2+i)^2 + a(2+i) + b = 0$, 整理得 $3 + 2a + b + (4+a)i = 0$, 所以 $\begin{cases} 3+2a+b=0, \\ 4+a=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-4, \\ b=5. \end{cases}$ 故选 D.

12. $\frac{1}{5}i$ 【解析】由题意知 $(2+i)z = i$, 即 $z = \frac{i}{2+i}$, 故 $\frac{z}{2-i} = \frac{i}{(2+i)(2-i)} = \frac{i}{4-i^2} = \frac{1}{5}i$.

13. B 【解析】由 $(1-3i)z = 3-i$, 得 $z = \frac{3-i}{1-3i} = \frac{(3-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3+9i-i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{6+8i}{10} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$, 所以 $|z| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$. 故选 B.

快解

根据复数模的运算性质 $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} (z_2 \neq 0)$, 可得

$$|z| = \frac{|3-i|}{|1-3i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1. \text{ 故选 B.}$$

14. A 【解析】由题意, 知 $5+zi = z-zi$, 即 $5 = (1-2i)z$, 所以 $z = \frac{5}{1-2i} = \frac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = 1+2i$, 所以 $|z-i| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$. 故选 A.

15. B 【解析】由 $z = 1+i$, 得 $\frac{z}{z-1} = \frac{1+i}{i} = \frac{i+i^2}{i^2} = 1-i$, 所以 $\left| \frac{z}{z-1} \right| = |1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

16. ABD 【解析】依题意, 得复数 z_1, z_2 是方程 $x^2 - 4x + 8 = 0$ 的两个根, $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 = -16 = (4i)^2$, 解得 $x = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$, 不妨令 $z_1 = 2+2i, z_2 = 2-2i$.

$$|z_1| \cdot |z_2| = \sqrt{4+4} \times \sqrt{4+4} = 8, \text{ 故 A 正确;}$$

$$|z_1 - z_2| = |4i| = 4, \text{ 故 B 正确;}$$

$$|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{2+2i}{2-2i} \right| = \left| \frac{(2+2i)^2}{(2-2i)(2+2i)} \right| = \left| \frac{8i}{8} \right| = |i| = 1, \text{ 故 D 正}$$

确. 故选 ABD.

17. D 【解析】设 $z = x+yi (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$.

因为 $z - e^{i\pi} = x+yi - \cos \pi - i \sin \pi = x+1+yi$, 所以 $|z - e^{i\pi}| = |x+$

$$1+yi| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + \frac{1}{4} - x^2} = \sqrt{2x + \frac{5}{4}}.$$



因为 $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$, 易知当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $|z - e^{i\pi}|$ 取得最大值,

所以 $|z - e^{i\pi}|$ 的最大值为 $\sqrt{2 \times \frac{1}{2} + \frac{5}{4}} = \frac{3}{2}$. 故选 D.

18.3 【解析】由题意可知 $\begin{cases} x_1 x_2 = m, \\ x_1 + x_2 = 2, \end{cases}$ 可令 $x_1 = 1 + ai, x_2 = 1 - ai$,

其中 $a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$, 所以 $|x_1| + |x_2| = 2\sqrt{1+a^2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 2$, 所以 $x_1 x_2 = 1 + a^2 = m = 3$.

19. D 【解析】先利用复数的除法运算化简 z , 进而得到其共轭复数, 再利用复数的几何意义求解.

由题意, 得 $z = \frac{4+3i}{2-i} = \frac{(4+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{5+10i}{5} = 1+2i$, 所以 $\bar{z} = 1-2i$, 故 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(1, -2)$, 位于第四象限.

20. D 【解析】设 $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}, z \neq 0$), 则 $\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, 解得 $a=b \neq 0$, 则 $\frac{\bar{z}+z}{z} = \frac{\bar{z}}{z} + 1 = \frac{a-ai}{a+ai} + 1 = \frac{1-i}{1+i} + 1 = 1-i$, 则 $\frac{\bar{z}+z}{z}$ 在复平面内所对应的点为 $(1, -1)$, 位于第四象限. 故选 D.

21. C 【解析】由复数 $z \cdot (1+i)$ 在复平面内对应的点为 $(2, 0)$, 可得 $z \cdot (1+i) = 2$, 所以 $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$.

22. A 【解析】设 $z = (a-2i)(2-i) = 2a-4i-ai+2i^2 = 2a-2+(-4-a)i$.

对于 A: 若复数 z 位于第一象限, 则需满足 $\begin{cases} 2a-2 > 0, \\ -4-a > 0, \end{cases}$ 解得 $a < -4$ 且 $a > 1$, 此时 a 无解, 即复数 z 不可能位于第一象限, 故 A 正确;

对于 B: 若复数 z 位于第二象限, 则需满足 $\begin{cases} 2a-2 < 0, \\ -4-a > 0, \end{cases}$ 解得 $a < 1$ 且 $a < -4$, 即 $a < -4$, 故复数 z 有可能位于第二象限, 故 B 错误;

对于 C: 若复数 z 位于第三象限, 则需满足 $\begin{cases} 2a-2 < 0, \\ -4-a < 0, \end{cases}$ 解得 $a < 1$ 且 $a > -4$, 即 $-4 < a < 1$, 故复数 z 有可能位于第三象限, 故 C 错误;

对于 D: 若复数 z 位于第四象限, 则需满足 $\begin{cases} 2a-2 > 0, \\ -4-a < 0, \end{cases}$ 解得 $a > 1$ 且 $a > -4$, 即 $a > 1$, 故复数 z 有可能位于第四象限, 故 D 错误. 故选 A.

23. A 【解析】根据复数与复平面内向量的关系, 结合三角函数计算可得.

复数 $3 - \sqrt{3}i$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OA} = (3, -\sqrt{3})$, 则 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$, 向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴正半轴夹角为 $-\frac{\pi}{6}$.



设该向量绕原点按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后所得向量的坐标为

(m, n) , 则 $m = 2\sqrt{3} \cos\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, $n = 2\sqrt{3} \cdot$

$\sin\left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = -2\sqrt{3}$, 即旋转后所得向量坐标为 $(0,$

$-2\sqrt{3})$, 故旋转后的向量对应的复数为 $-2\sqrt{3}i$.

一题多解 借助复数的三角形式及其乘法的几何意义计算可得.

复数 $3-\sqrt{3}i$ 对应的向量绕原点按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 后的向

量对应的复数为 $(3-\sqrt{3}i) \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] =$

$(3-\sqrt{3}i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2\sqrt{3}i$.

24. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由题知 $\vec{OA} = (1, \sqrt{3})$, $\vec{OB} = (0, 3)$, $\cos\langle\vec{OA}, \vec{OB}\rangle =$

$\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}| |\vec{OB}|} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \langle\vec{OA}, \vec{OB}\rangle \in [0, \pi]$, $\therefore \angle AOB =$

$\frac{\pi}{6}$, $\therefore \vec{OA}$ 与 $\vec{OB}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{6}$.

25. $\sqrt{10}+1$ 【解析】令复数 $z_1 = x+yi$, $x, y \in \mathbf{R}$, 则 $\bar{z}_1 = x-yi$,

所以 $z_1 + 2\bar{z}_1 = 3x-yi = -3-i$, 所以 $x = -1, y = 1$, 即 $z_1 = -1+i$.

因为 $|z_2 - z_1| = 1$, 所以在复平面内, 复数 z_2 所对应的点的轨迹是以 $(-1, 1)$ 为圆心, 1 为半径的圆. 又点 $(-1, 1)$ 到点 $(0, -2)$ 的距离为 $\sqrt{(-1-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$, 所以 $|z_2 + 2i|$ 的最大值为 $\sqrt{10}+1$.

试题解读 根据题意求得 z_1 , 根据复数的几何意义求得 z_2 在复平面内对应点的轨迹, 再根据几何意义求目标式的最大值.

真题风向练

26. **ACD** **命题点** ①共轭复数的概念、复数的模及复数的四则运算

【解析】对于 A, 因为 $z = 3+2i$, 所以 $\bar{z} = 3-2i$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $z = 3+2i$, 所以 $|z| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \neq 5$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $z = 3+2i$, 所以 $z^2 = (3+2i)^2 = 9+12i-4 = 5+12i$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $z = 3+2i$, 所以 $\frac{z+3}{z-i} = \frac{6+2i}{3+i} = 2 \in \mathbf{R}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

第3章 ▶ 真题综合测试

1. **C** **命题点** ①复数的概念、复数的运算

【解析】 $(1+5i)i = i+5i^2 = -5+i$, 则虚部为 1. 故选 C.

**2. B 命题点** ⊙复数的乘法运算

【解析】 $(1-3i)^2 = 1-6i+(3i)^2 = 1-6i-9 = -8-6i$, 故选 B.

3. A 命题点 ⊙复数的运算

【解析】由 $z=1+i$, 得 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$. 故选 A.

4. C 命题点 ⊙复数的模

【解析】由 $z=-1-i$, 得 $|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$. 故选 C.

5. A 命题点 ⊙复数的乘法运算

【解析】 $(1+3i)(3-i) = 3-i+9i+3 = 6+8i$, 在复平面内对应的点的坐标为 $(6, 8)$, 位于第一象限, 故选 A.

6. A 命题点 ⊙复数的运算、共轭复数

【解析】因为 $z=5+i$, 所以 $\bar{z}=5-i$, 所以 $i(\bar{z}+z) = i(5-i+5+i) = 10i$. 故选 A.

7. A 命题点 ⊙复数的四则运算及几何意义

【解析】因为 $\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 所以在复平面内, 复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 对应的点位于第一象限. 故选 A.

8. C 命题点 ⊙复数的乘法运算、共轭复数

【解析】因为 $z=2-i$, 所以 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$, 所以 $z(\bar{z}+i) = z \cdot \bar{z} + zi = 5 + (2-i)i = 6+2i$, 故选 C.

9. D 命题点 ⊙复数的运算、共轭复数

【解析】由 $i(1-z) = 1$, 得 $z = 1 - \frac{1}{i} = 1+i$, 所以 $z+\bar{z} = 1+i+1-i = 2$. 故选 D.

10. B 命题点 ⊙复数的四则运算

【解析】 $\because (1-i)^2 z = 3+2i, \therefore z = \frac{3+2i}{(1-i)^2} = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i)i}{-2i^2} = \frac{-2+3i}{2} = -1 + \frac{3}{2}i$. 故选 B.

11. A 命题点 ⊙复数的基本概念和运算

【解析】依题意可得 $1-2i+a(1+2i)+b=0$, 根据复数相等的充要条件可得 $\begin{cases} 1+a+b=0, \\ -2+2a=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2. \end{cases}$ 故选 A.

易错警示 两复数相等的充要条件: 实部与实部相等, 虚部与虚部相等.

12. A 命题点 ⊙复数的四则运算及共轭复数的概念

【解析】 $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$, 则 $\bar{z} = \frac{1}{2}i$, $\therefore z-\bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$. 故选 A.

13. B 命题点 ⊙共轭复数的概念及复数的四则运算

【解析】因为 $z = \frac{2+i}{1+i^2+i^5} = \frac{2+i}{1+(-1)+i} = \frac{2+i}{i} = -(2+i)i = 1-2i$, 所以 $\bar{z} = 1+2i$. 故选 B.

14. ACD 必刷题型 ⊙复数的四则运算

【解析】设 $z=x+yi (x, y \in \mathbf{R})$, 则由已知得 $(x-yi)(1-i) = x+$



$yi + \frac{5i(2+i)}{5}$, 即 $x - y - (x + y)i = x - 1 + (y + 2)i$, 所以

$$\begin{cases} x - y = x - 1, \\ -x - y = y + 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -4, \\ y = 1, \end{cases} \text{ 所以 } z = -4 + i, \text{ 则 } \bar{z} = -4 - i, \text{ 则复平}$$

面内 $\bar{z}$ 对应的点的坐标为 $(-4, -1)$, 在第三象限, 故 **A 正确, B 错误**;

$z\bar{z} = (-4 + i)(-4 - i) = 17$, z 的实部为 -4 , 虚部为 1 , 所以 z 的实部与虚部之积为 -4 , 故 **C, D 正确**. 故选 **ACD**.

15. BCD 命题点 ①复数的四则运算、复数的模

【解析】 设 $z = a + bi, w = c + di (a, b, c, d \in \mathbf{R})$.

对于 **A**, $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2, |z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$, 故 **A 错误**;

对于 **B**, $\frac{z}{z} = \frac{z^2}{z \cdot z}$, 又 $\bar{z} \cdot z = |z|^2$, 则 $\frac{z}{z} = \frac{z^2}{|z|^2}$, 故 **B 正确**;

对于 **C**, $z - w = a + bi - c - di = a - c + (b - d)i$, 则 $\overline{z - w} = a - c - (b - d)i$, $\bar{z} = a - bi, \bar{w} = c - di$, 则 $\bar{z} - \bar{w} = a - bi - c + di = a - c - (b - d)i$, 即 $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$, 故 **C 正确**;

$$\text{对于 D, } \left| \frac{z}{w} \right| = \left| \frac{a + bi}{c + di} \right| = \left| \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \right| = \frac{|ac + bd - (ad - bc)i|}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2}}{c^2 + d^2},$$

$$\frac{|z|}{|w|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{c^2 + d^2}}{c^2 + d^2} = \frac{\sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2}}{c^2 + d^2},$$

故 $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$, 故 **D 正确**. 故选 **BCD**.

16. $2\sqrt{2}$ 命题点 ①复数的运算, 复数的几何意义

【解析】 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, $\therefore z^2 = \bar{z}^2$, 即 $(a + bi)^2 = (a - bi)^2$, 则 $ab = 0$, 又 $|z| \leq 1$, 即 $a^2 + b^2 \leq 1$, 则复数 z 在复平面内对应的点的轨迹为如图所示的两条线段 BD, CE , 而 $|z - 2 - 3i| = |z - (2 + 3i)|$ 表示点 (a, b) 到点 $A(2, 3)$ 的距离, 由图可知, $\min\{|AB|, |AC|\}$ 为 $|z - 2 - 3i| = |z - (2 + 3i)|$ 的最小值, 而 $|AB| = \sqrt{(2 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2}$, $|AC| = \sqrt{(2 - 1)^2 + (3 - 0)^2} = \sqrt{10} > 2\sqrt{2}$, $\therefore |z - 2 - 3i|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

